ทบทวน เรื่อง อนุพันธ์

อนุพันธ์ของฟังก์ชันค่าคงที่

ทฤษฎีบท 1 ให้ y = c เมื่อ c คือค่าคงที่

ดังนั้น $\frac{dy}{dx} = 0$

อนุพันธ์ของฟังก์ชันในรูป x^n

ทฤษฎีบท 2 ถ้า $y = x^n$ เมื่อ n = 1, 2, 3, … ดังนั้น $\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$

อนุพันธ์ของฟังก์ชันในรูป cx^n

ทฤษฎีบท 3 ถ้า u = f(x) เป็นฟังก์ชันที่สามารถหาค่าอนุพันธ์ได้ และ c เป็นค่าคงที่ แล้ว

$$\frac{\mathrm{d}(\mathrm{cu})}{\mathrm{dx}} = \mathrm{c}\frac{\mathrm{du}}{\mathrm{dx}}$$

ค่าอนุพันธ์ของผลบวกของฟังก์ชัน

ทฤษฎีบท 4 ถ้า y = u + v แล้ว $\frac{d(u+v)}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$ เมื่อ u และ v เป็นฟังก์ชันที่สามารถหาค่าอนุพันธ์ได้ และ y เป็นผลบวกของฟังก์ชันดังกล่าวมีจำนวนจำกัด

จงหาค่าของ $\frac{dy}{dx}$ เมื่อ $y = x^3 + 7x^2 - 5x + 4$

อนุพันธ์ลำดับที่สองของฟังก์ชัน

สัญลักษณ์อนุพันธ์ของ y เทียบกับ x คือ $y' = \frac{dy}{dx}$ คือการหาค่าอนุพันธ์ลำดับที่ 1 เมื่อเราหาค่าอนุพันธ์ของ y' เทียบกับ x อีกครั้งหนึ่ง เราจะได้ ค่าอนุพันธ์ลำดับที่ 2 (second derivative)

บทนิยาม 2 กำหนดให้ y เป็นฟังก์ชันของ x ค่าอนุพันธ์ลำดับที่ 2 ของ y เมื่อเทียบกับ x คือ

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

สัญลักษณ์สำหรับค่าอนุพันธ์ลำดับที่ 2 แทนด้วย $\frac{d}{dx}\left(\frac{d...}{dx}\right) = \frac{d^2}{dx^2}(...)$

รูปทั่ว ๆ ไปสำหรับค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชัน y = f(x) จำนวน n ครั้งที่ต่อเนื่องกัน แทนด้วยสัญลักษณ์ คือ $y^{(n)}$, $f^{(n)}(x)$ หรือ $\frac{d^n y}{dx^n}$

ถ้า $y = x^3 - 3x^2 + 2$ จงหาค่าอนุพันธ์ที่ 4 ของ y

วิธีทำ จาก $y = x^3 - 3x^2 + 2$ ดังนั้น

$$y' = \frac{dy}{dx} = 3x^2 - 6x$$

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = 6x - 6$$

$$y''' = y^{(3)} = \frac{d^3y}{dx^3} = 6$$

$$y'''' = y^{(4)} = \frac{d^4y}{dx^4} = 0$$

ค่าอนุพันธ์ของผลคูณ

ทฤษฎีบท 5 ให้ y = uv เมื่อ u และ v เป็นฟังก์ชันพหุนามของ x ที่สามารถหาค่าอนุพันธ์ได้

ดังนั้น $\frac{d(uv)}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$

ค่าอนุพันธ์ของผลหาร

ทฤษฎีบท 6 ให้ $y=\frac{u}{v}$ เมื่อ u และ v เป็นฟังก์ชันพหุนามของ x ที่สามารถหาค่าอนุพันธ์ได้ และ v $\neq 0$ ดังนั้น $\frac{d}{dx}(\frac{u}{v})=\frac{v\frac{du}{dx}-u\frac{dv}{dx}}{v^2}$

ค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชันยกกำลังที่เป็นบวกหรือศูนย์

ทฤษฎีบท 7 ถ้า u = g(x) เป็นฟังก์ชันของ x ที่สามารถหาค่าอนุพันธ์ได้
และ n เป็นจำนวนเต็มบวกหรือ 0
ดังนั้น $\frac{du^n}{dx}=nu^{n-1}\frac{du}{dx}$ เมื่อ $y = u^n$

กำหนดให้ $y=\frac{x^2+1}{x^2-1}, x^2\neq 1$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ จาก $y=\frac{x^2+1}{x^2-1}, x^2\neq 1$

ดังนั้น $\frac{dy}{dx}$ = $\frac{(x^2-1)\cdot 2x-(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2-1)^2}=\frac{-4x}{(x^2-1)^2}$

กำหนดให้ y = $(x^2+1)^3(x^3-1)^2$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ จาก y = $(x^2+1)^3(x^3-1)^2$

ดังนั้น $\frac{dy}{dx}$ = $(x^2+1)^3\frac{d}{dx}(x^3-1)^2+(x^3-1)^2\frac{d}{dx}(x^2+1)^3$

ค่าของ $\frac{d}{dx}(x^3-1)^2$ และ $\frac{d}{dx}(x^2+1)^3$ ใน (2.1.16.1) หาได้ดังนี้

$\frac{d}{dx}(x^3-1)^2$ = $2(x^3-1)\frac{d}{dx}(x^3-1)$

= $2(x^3-1)\cdot 3x^2$

= $6x^2(x^3-1)$

และ $\frac{d}{dx}(x^2+1)^3$ = $3(x^2+1)^2\frac{d}{dx}(x^2+1)$

$$= 3(x^2+1)^2 \cdot 2x$$

$$= 6x(x^2+1)^2$$

$$\frac{dy}{dx} = (x^2+1)^3 6x^2(x^3-1) + (x^3-1)^2 6x(x^2+1)^2$$

$$= 6x(x^2+1)^2(x^3-1)[x(x^2+1)+(x^3-1)]$$

$$= 6x(x^2+1)^2(x^3-1)(2x^3+x-1)$$

นั่นคือ ถ้า $y = (x^2+1)^3(x^3-1)^2$

จะได้ $\frac{dy}{dx} = 6x(x^2+1)^2(x^3-1)(2x^3+x-1)$

ค่าอนุพันธ์ของความสัมพันธ์โดยปริยาย

ฟังก์ชันในรูป y = f(x) ซึ่งเป็นการกำหนดค่า y ในพจน์ของ x อย่างไรก็ตามจะมีสมการซึ่งอยู่ในรูปแบบ ต่อไปนี้ เช่น

$x^2 + y^2 = 4$

$xy = 1$

$y^2 = x$

$x^2 + xy + y^2 = 3$

ตัวอย่างที่กล่าวมานี้ต่างก็อยู่ในรูป x และ y สัมพันธ์กัน เช่น ความสัมพันธ์ $x^2 + y^2 = 4$ ประกอบด้วยฟังก์ชัน 2 ฟังก์ชันคือ $y_1 = f_1(x) = +\sqrt{4-x^2}$ และ $y_2 = f_2(x) = -\sqrt{4-x^2}$ ซึ่งอาจกล่าวได้ว่าสมการดังกล่าวแสดงถึงความสัมพันธ์ระหว่าง x และ y ลักษณะดังกล่าวเราเรียกว่า ความสัมพันธ์โดยปริยาย (Implicit relation) เมื่อ y ในพจน์ของ x ไม่กำหนดค่าอย่างชัดแจ้ง การหาค่าอนุพันธ์ของความสัมพันธ์ดังกล่าวอาจจะหา $\frac{dy}{dx}$ โดยกำหนดให้ y เป็นตัวไม่รู้ค่า (Unknown) ซึ่งเรียกวิธีการหาค่าอนุพันธ์ของความสัมพันธ์โดยปริยายว่า การหาค่าอนุพันธ์โดยปริยาย (Implicit differentiation) และสามารถประยุกต์ทฤษฎีบทการหาค่าอนุพันธ์ในรูปของ u^n, uv, $\frac{u}{v}$ และอื่น ๆ มาใช้ได้

จงหาค่าของ $\frac{dy}{dx}$ ถ้า y สัมพันธ์กับ x ดังสมการ $x^5 + 4xy^3 - 3y^5 = 2$

วิธีทำ จากสมการ $x^5 + 4xy^3 - 3y^5 = 2$

$$\frac{d}{dx}(x^5) + \frac{d}{dx}(4xy^3) - \frac{d}{dx}(3y^5) = \frac{d}{dx}(2)$$

$5x^4 + 4\,[x\frac{d}{dx}(y^3) + y^3\frac{dx}{dx}] - 15y^4\frac{dy}{dx} = 0$

$5x^4 + 4\,(3xy^2\frac{dy}{dx} + y^3) - 15y^4\frac{dy}{dx} = 0$

$(5x^4 + 4y^3) + (12xy^2 - 15y^4)\frac{dy}{dx} = 0$

$(12xy^2 - 15y^4)\frac{dy}{dx} = -(5x^4 + 4y^3)$

$\frac{dy}{dx} = -\frac{5x^4+4y^3}{12xy^2-15y^4}$ เมื่อ $12xy^2 - 15y^4 \neq 0$

หรือ $\frac{dy}{dx} = \frac{5x^4+4y^3}{15y^4-12xy^2}$ เมื่อ $15y^4 - 12xy^2 \neq 0$

อนุพันธ์ของฟังก์ชันประกอบและกฎลูกโซ่

ทฤษฎีบท 10 (กฎลูกโซ่) ถ้า $y = f(u)$ เป็นฟังก์ชันของ u ที่สามารถหาค่าอนุพันธ์ได้
และ $u = g(x)$ เป็นฟังก์ชันของ x ที่สามารถหาค่าอนุพันธ์ได้
ดังนั้น $y = f(g(x)) = f\circ g(x) = h(x)$ เป็นฟังก์ชันของ x ที่สามารถหาค่าอนุพันธ์ได้
จะได้ว่า $(f\circ g)'(x) = h'(x) = f'(g(x))\,g'(x)$
หรือ กล่าวอีกอย่างหนึ่งว่า $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$

กำหนดให้ $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 4$ และ $x = g(t) = t^2 + t$ จงหา $\frac{dy}{dt}$

วิธีทำ จาก $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 4$

ดังนั้น $\frac{dy}{dx} = f'(x) = 3x^2 - 6x + 5$

(2.1.15.10)

และจาก $x = g(t) = t^2 + t$

ดังนั้น $\frac{dx}{dt} = g'(t) = 2t + 1$

ดังนั้น $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = (3x^2 - 6x + 5)(2t + 1)$

กำหนดให้ $y = x^{18}$ และ $x = t^5 + 9t + 7$ จงหา $\frac{dy}{dt}$

วิธีทำ จาก $y = x^{18}$ ดังนั้น $\frac{dy}{dx} = 18x^{17}$

จาก $x = t^5 + 9t + 7$ ดังนั้น $\frac{dx}{dt} = 5t^4 + 9$

ดังนั้น $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = (18x^{17})(5t^4 + 9)$

$= 18(t^5 + 9t + 7)^{17}(5t^4 + 9)$

กำหนดให้ $y = t^2 - 1$ และ $x = 2t + 3$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ $\frac{dy}{dt} = 2t$ และ $\frac{dx}{dt} = 2$

เนื่องจาก $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$

ดังนั้น $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2t}{2} = t$

กำหนดให้ $y = u^3 + 2$, $u = \sqrt{x^2 - 1}$ และ $x = \frac{1}{t-3}$ จงหา $\frac{dy}{dt}$

วิธีทำ จาก $y = u^3 + 2$ ดังนั้น $\frac{dy}{du} = 3u^2$

จาก $u = \sqrt{x^2 - 1}$ ดังนั้น $\frac{du}{dx} = \frac{1}{2}(x^2 - 1)^{-\frac{1}{2}}(2x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$

และจาก $x = \frac{1}{t-3}$ ดังนั้น $\frac{dx}{dt} = \frac{-1}{(t-3)^2}$

ดังนั้น $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = (3u^2)\left(\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right)\left(\frac{-1}{(t-3)^2}\right)$

$= \frac{-3u^2 x}{(t-3)^2\sqrt{x^2-1}}$

แบบฝึกหัด

1. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

(a) $y = x^{12}$ (c) $y = 7x^5$ (e) $w = -4u^{1/2}$

(b) $y = 63$ (d) $w = 3u^{-1}$ (f) $w = 4u^{1/4}$

2. จงหาอนุพันธ์ต่อไปนี้

(ก) $\frac{d(-x^{-4})}{dx}$ (ข) $\frac{d5w^4}{dw}$ (ค) $\frac{dau^b}{du}$

(ง) $\frac{d9x^{\frac{1}{3}}}{dx}$ (จ) $\frac{dcx^2}{dx}$ (ฉ) $\frac{d(-au^{-b})}{du}$

9. จงหา f '(1) และ f '(2) จากฟังก์ชันต่อไปนี้

(ก) $y = f(x) = 18x$ (ค) $f(x) = -5x^{-2}$ (จ) $f(w) = 6w^{1/3}$

(ข) $y = f(x) = cx^3$ (ง) $f(x) = \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}$ (ฉ) $f(w) = -3w^{\frac{-1}{6}}$

10. จงหาอนุพันธ์โดยใช้กฎการคูณ

(ก) $(ax^2-2)(3x+1)$ (ค) $x^2(4x+6)$ (จ) $(2-3x)(1+x)(x+2)$

(ข) $(3x+10)(6x^2-7x)$ (ง) $(ax-b)(cx^2)$ (ฉ) $(x^2+3)x^{-1}$

11. กำหนด $y = u^2 + 2u$ โดยที่ $u = 5 - x^2$ จงหา $\frac{dy}{dx}$ โดยใช้กฎลูกโซ่

12. กำหนด $w = ay^2$ และ $y = bx^2 + cx$ จงหา $\frac{dw}{dx}$ โดยใช้กฎลูกโซ่

13. ใช้กฎลูกโซ่หาคำตอบต่อไปนี้

(ก) $y = (3x^2 - 13)^3$ (ข) $y = (7x^3 - 5)^9$ (ค) $y = (ax + b)^5$

14. กำหนด $y = (16x + 3)^{-2}$ ใช้กฎลูกโซ่หา $\frac{dy}{dx}$ เขียนฟังก์ชันใหม่เป็น $y = \frac{1}{(16x+3)^2}$ และหา $\frac{dy}{dx}$ โดยใช้กฎการหาร