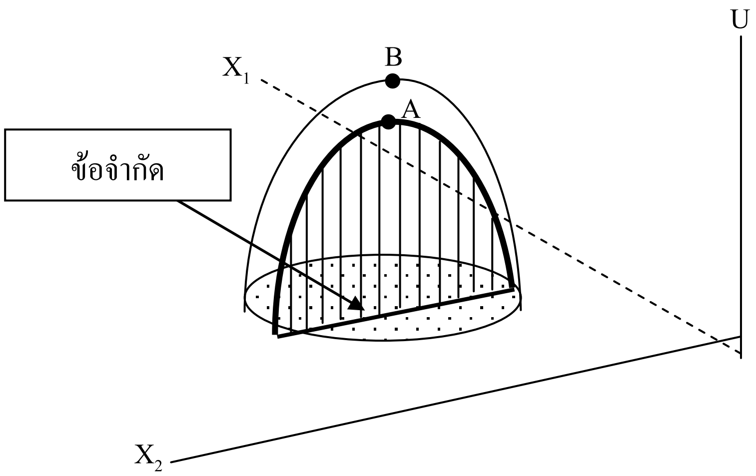
การหาค่าที่เหมาะสมภายใต้ข้อจำกัด



ภาพ จุดสูงสุดกรณีไม่มีข้อจำกัดและภายใต้ข้อจำกัด

การหาค่าสูงสุดหรือต่ำสุดและค่านิ่ง

จากสมการหรือฟังก์ชันอรรถประโยชน์

$$u = x_1x_2 + 2x_1 \qquad (7.1.1)$$

และมีงบประมาณจำกัด (Budget constraint) คือ

$$4x_1 + 2x_2 = 60 \qquad (7.1.2)$$

วิธีการหาค่า x_1, x_2 สามารถทำได้โดย แทนสมการ (7.1.2) ในสมการ (7.1.1) นั่นคือ

$$u = x_1(30-2x_1) + 2x_1 = 32x_1 - 2x_1^2$$

จากนั้นก็ใช้หลักการที่ได้ศึกษาในบทที่แล้วเพื่อหาคำตอบ คำตอบที่ได้คือ $x_1^* = 8, x_2^* = 14$ และ $u^* = 128$ และ $\frac{d^2u}{dx_1^2} = -4 < 0$

วิธีตัวคูณลากรองจ์ (Lagrange multipliers)

วิธีตัวคูณลากรองจ์เป็นวิธีที่เปลี่ยนข้อจำกัดให้อยู่ในรูปแบบที่สามารถใช้วิธีการหาจุดสูงสุดและต่ำสุดเหมือนกับกรณีไม่มีข้อจำกัด นั่นคือ การเปลี่ยนให้เป็น Lagrangian function

$$z = x_1 x_2 + 2x_1 + \lambda(60 - 4x_1 - 2x_2)$$

โดยที่ λ เรียกว่า Lagrange multiplier จากนั้นจะใช้วิธีหาค่าสูงสุด-ต่ำสุด ดังนั้น $z = f(\lambda, x_1, x_2)$

$$z_\lambda = \frac{\partial z}{\partial \lambda} = 60 - 4x_1 - 2x_2 = 0$$

$$z_1 = \frac{\partial z}{\partial x_1} = x_2 + 2 - 4\lambda = 0$$

$$z_2 = \frac{\partial z}{\partial x_2} = x_1 - 2\lambda = 0$$

แก้สมการ จะพบว่า $x_1^* = 8, x_2^* = 14, \lambda^* = 4$

ตัวอย่าง กำหนด $z = xy$ และ $x + y = 6$

$$\therefore z = xy + \lambda(6 - x - y)$$

$$z_\lambda = 6 - x - y = 0$$

$$z_x = y - \lambda = 0$$

$$z_y = x - \lambda = 0$$

ดังนั้น $\lambda^* = 3, x^* = 3, y^* = 3, z^* = 9$ ก่อนที่จะบอกว่าค่าเหล่านี้ทำให้ z มีค่าสูงสุดนั้นจะต้องทำการทดสอบ S.O.C ก่อน

เงื่อนไขลำดับที่สอง กรณีหาค่าเหมาะสมภายใต้ข้อจำกัด

สมมติสมการจุดมุ่งหมายหรือ Objective function ดังสมการ

$z = f(x, y)$

โดยมีข้อกำหนดคือ $g(x, y) = 0$

ดังนั้น Lagrangian function คือ

$$\left.\begin{aligned} z &= f(x,y)+\lambda g(x,y) \\ \frac{\partial z}{\partial x} &= f_x+\lambda g_x = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= f_y+\lambda g_y = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial \lambda} &= g(x,y) = 0 \end{aligned}\right\}$$

สมการข้างต้นสามารถหาค่า x, y และ λ ได้ เมื่อได้ค่านี้แล้วต้องมาทดสอบ S.O.C เพื่อดูว่าเป็นค่าสูงสุดหรือต่ำสุด นั่นคือ

$d^2z>0$ หรือ $d^2z<0$ เพียงแต่ dx กับ dy ไม่อิสระต่อกันเหมือนแต่ก่อน ดังนั้นต้องคำนวณหา d^2z ภายใต้ข้อจำกัด

$$dg = g_x dx + g_y dy = 0$$

สรุปได้ว่า d^2z ภายใต้ข้อจำกัด dg = 0 นั้น

1) d^2z เป็นบวกแน่ๆ (Positive definite) ถ้า $|\overline{H_2}|<0$ จะได้ค่าต่ำสุด

2) d^2z เป็นลบแน่ๆ (Negative definite) ถ้า $|\overline{H_2}|>0$ จะได้ค่าสูงสุด

โดยที่ $|\overline{H_2}| = \begin{vmatrix} z_{xx} & z_{xy} & g_x \\ z_{yx} & z_{yy} & g_y \\ g_x & g_y & 0 \end{vmatrix}$

โดยที่ $z_{xx}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ $\quad z_{xy}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=z_{yx}$

$z_{yy}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ $\quad g_x=\dfrac{\partial g}{\partial x} : g_y=\dfrac{\partial g}{\partial y}$

กรณี $|\overline{H_3}| = \begin{vmatrix} z_{11} & z_{12} & z_{13} & g_1 \\ z_{21} & z_{22} & z_{23} & g_2 \\ z_{31} & z_{32} & z_{33} & g_3 \\ g_1 & g_2 & g_3 & 0 \end{vmatrix}$

สรุปได้ว่า

1) d^2z เป็นบวกแน่ๆ ถ้า $|\overline{H_2}|,|\overline{H_3}|,...,|\overline{H_n}|<0$

2) d^2z เป็นลบแน่ๆ ถ้า $|\overline{H_2}|>0,|\overline{H_3}|<0,|\overline{H_4}|>0,...$

การหา Determinant นั้นมีสูตรการหากรณีมิติ 3 X 3 และ 2 X 2 ดังนี้

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= (a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}) + (a_{12}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33}) + (a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31})$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

เช่น $|A| = \begin{vmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$ $\quad |A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = -9$

ตัวอย่าง กำหนด $\pi = -100 + 80x - 0.1x^2 + 100y - 0.2y^2$ จงหา x, y ที่ให้ค่า π สูงสุด ภายใต้ข้อจำกัด x + y = 325

เขียนให้อยู่ในรูปฟังก์ชันลากรองจ์ ดังนี้

$$z = -100 + 80x - 0.1x^2 + 100y - 0.2y^2 + \lambda(325 - x - y)$$

เงื่อนไขลำดับที่หนึ่ง (F.O.C) $z_x = 80 - 0.2x - \lambda = 0$

$$z_y = 100 - 0.4y - \lambda = 0$$

$$z_\lambda = (325 - x - y) = 0$$

ดังนั้น $x^* = 183.3, y^* = 141.7, \lambda = 43.3$

S.O.C $z_{xx} = -0.2$

$$z_{xy} = 0 = z_{yx}$$

$$z_{yy} = -0.4$$

$g_x = 1$ (หรือ -1 ก็ได้)

$g_y = 1$ (หรือ -1 ก็ได้)

$$|\overline{H_2}| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -0.2 & 0 \\ 1 & 0 & -0.4 \end{vmatrix} = 0.6 > 0$$ จึงเป็นกรณีค่าสูงสุด

ตัวอย่าง กำหนด $z = 4x^2 + 3xy + 6y^2$ สมการข้อจำกัดคือ x + y =56

เขียนสมการ Lagrangian ได้ดังนี้

$$z = 4x^2 + 3xy + 6y^2 + \lambda(56 - x - y)$$

F.O.C

$$z_x = 8x + 3y - \lambda = 0$$
$$z_y = 3x + 12y - \lambda = 0$$
$$z_\lambda = 56 - x - y = 0$$

ได้คำตอบ x = 36, y = 20, λ = 348

S.O.C $z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}, g_x, g_y$ หา $\left|\overline{H_2}\right|$ ได้ดังนี้

$$\left|\overline{H_2}\right| = \begin{vmatrix} 8 & 3 & -1 \\ 3 & 12 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -14 < 0$$

$\therefore d^2z$ เป็นบวกแน่ๆ นั่นคือ z ณ x = 36, y = 20 เป็นจุดต่ำสุดของ z

ตัวอย่าง กำหนด $y = x_1^{0.4} x_2^{0.5}$ ข้อจำกัดคือ $3x_1 + 4x_2 = 108$

กำหนด Lagrange function ดังนี้

$$y = x_1^{0.4} x_2^{0.5} + \lambda(108 - 3x_1 - 4x_2)$$

F.O.C จะได้

$$y_1 = 0.4x_1^{-0.6} x_2^{0.5} - 3\lambda = 0$$
$$y_2 = 0.5x_1^{0.4} x_2^{-0.5} - 4\lambda = 0$$
$$y_\lambda = 108 - 3x_1 - 4x_2 = 0$$

แก้สมการจะได้ $x_1 = 16, x_2 = 15$ และ $\lambda = 0.2935$

$$\left|\overline{H}\right| = \begin{vmatrix} -0.24x_1^{-1.6} x_2^{0.5} & 0.2x_1^{-0.6} x_2^{-0.5} & -3 \\ -0.2x_1^{-0.6} x_2^{-0.5} & -0.25x_1^{0.4} x_2^{-1.5} & -4 \\ -3 & -4 & 0 \end{vmatrix}$$

แทนค่า $x_1 = 16, x_2 = 15$ ดังนั้น

$$\left|\overline{H_2}\right| = \begin{vmatrix} -0.0110 & 0.0097 & -3 \\ 0.0097 & -0.0130 & -4 \\ -3 & -4 & 0 \end{vmatrix} = 0.5258 > 0$$

ดังนั้น d^2y เป็นค่าลบแน่ๆ นั่นคือ ณ $x_1 = 16, x_2 = 15$ จะได้ค่า y สูงสุด

ความหมายของตัวคูณลากรองจ์

ถ้าสมมติให้ข้อจำกัด จากเดิม x + y = 325 เป็น x + y = 326 ตามโจทย์ตัวอย่างก่อนหน้านี้ จะพบว่า คำตอบจะเปลี่ยน คือ $x = 183.3, y = 141.7$ และ $\pi = 21358.3$ แต่จะพบว่ากำไรที่เปลี่ยนไปคือ 43.3 ซึ่งเท่ากับ λ นั่นเอง ดังนั้น λ คือ $\frac{\partial \pi}{\partial k}$ หมายถึง ข้อจำกัดที่เปลี่ยนไป 1 หน่วย ทำให้กำไรเปลี่ยนไป λ หน่วยนั่นเอง

กรณีเรื่องกำไร λ หมายถึง ต้นทุนค่าเสียโอกาสของข้อจำกัดหน่วยสุดท้าย (ส่วนเพิ่ม) ถ้าเพิ่มข้อจำกัด 1 หน่วยแล้วกำไรเพิ่ม λ ขณะเดียวกับการเพิ่มข้อจำกัด ทำให้ต้นทุนเพิ่มน้อยกว่า ก็ควรจะขยายข้อจำกัดออกไปให้มากขึ้น

แบบฝึกหัด

จงใช้ตัวคูณลากรองจ์ในการหาค่า x และ y ที่ทำให้ได้ค่า z สูงสุดหรือต่ำสุด

(ก) z = xy ภายใต้ข้อจำกัด x + 2y = 2

(ข) z = x(y + 4) ภายใต้ข้อจำกัด x + y = 8

(ค) z = x – 3y – xy ภายใต้ข้อจำกัด x + y = 6

(ง) $z = 7 - y + x^2$ ภายใต้ข้อจำกัด x + y = 0

(จ) z = x + 2y + 3w + xy – yw ภายใต้ข้อจำกัด x + y + 2w = 10

(ฉ) $z = x^2 + 2xy + yw^2$ ภายใต้ข้อจำกัด $2x + y + w^2 = 24$ และ x + w = 8